Demonstração AULA DE 26/01/2016

Escolho $q_1 = v_1$. Teremos então que definir q_2.

$$q_2 = v_2 - \alpha_1 q_1 \quad (\text{definir } \alpha_1 !!)$$

1º Quero que q_2 seja ortogonal a $[q_1]$

$$0 \overset{\text{quero}}{=} \langle q_2, q_1 \rangle = \langle v_2 - \alpha_1 q_1, q_1 \rangle$$

$$= \langle v_2, q_1 \rangle - \alpha_1 \langle q_1, q_1 \rangle \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle}$$

Com isso, definimos

$$\begin{cases} q_2 := v_2 - \dfrac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1 & \text{se } q_1 \neq 0_V. \\ q_2 := v_2 & \text{se } q_1 = 0_V \end{cases}$$

Assim (a) é satisfeita

2º: $S_2 = [v_1, v_2]$ $\qquad S_2 = W_2$?
$W_2 = [q_1, q_2]$

Caso $q_1 = 0_V$, então é claro que $S_2 = W_2$.

Agora se $q_1 \neq 0_V$, então $q_2 = v_2 - \dfrac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} q_1$.

Vejamos que $S_2 = W_2$. Que $W_2 \subseteq S_2$ é imediato.

Verifiquemos que $S_2 \subseteq W_2$. Seja $u \in S_2$, então $\exists\, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ tq $u = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2$. Logo,

$$
\begin{aligned}
u &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \\
&= \beta_1 v_1 + \beta_2 \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 + \beta_2 v_2 - \beta_2 \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \cdot v_1 \\
&= \left(\beta_1 + \frac{\beta_2 \langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} \right) v_1 + \beta_2 \left(v_2 - \frac{\langle v_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 \right)
\end{aligned}
$$

Portanto $u \in W_2$. E logo $S_2 = W_2$.

Definiremos agora q_3.

$$q_3 = v_3 - (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2) \quad (\text{definir } \alpha_1, \alpha_2 !)$$

2°: Quero que q_3 seja ortogonal a $[q_1, q_2]$

$$\overset{\text{quero}}{0} = \langle q_3, q_1 \rangle = \langle v_3 - (\alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2), q_1 \rangle$$

$$= \langle v_3, q_1 \rangle - \langle \alpha_1 q_1 + \alpha_2 q_2, q_1 \rangle$$

$$= \langle v_3, q_1 \rangle - \langle \alpha_1 q_1, q_1 \rangle - \langle \alpha_2 q_2, q_1 \rangle$$

$$= \langle v_3, q_1 \rangle - \alpha_1 \langle q_1, q_1 \rangle - \alpha_2 \underbrace{\langle q_2, q_1 \rangle}_{0}$$

$$= \langle v_3, q_1 \rangle - \alpha_1 \langle q_1, q_1 \rangle$$

$$\alpha_1 = \frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle}$$

Analogamente $\alpha_2 = \dfrac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle}$

Então

$$q_3 = v_3 - \left(\frac{\langle v_3, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} \cdot q_1 + \frac{\langle v_3, q_2 \rangle}{\langle q_2, q_2 \rangle} \cdot q_2 \right)$$

Analogamente mostra que $S_3 = W_3$. Fazendo esse procedimento sucessivamente, temos

$$q_{k+1} = v_{k+1} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k q_k.$$

letra (c) é exercício!

Exemplos :

① $\{\overset{v_1}{\widetilde{(2,1)}} ; \overset{v_2}{\widetilde{(1,1)}}\}$

$$q_1 = v_1 = (2,1)$$

$$q_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} \cdot q_1$$

$$= (1,1) - \frac{\langle (1,1) , (2,1) \rangle}{\langle (2,1) , (2,1) \rangle} \cdot (2,1)$$

$$= \left(-\frac{1}{5} , \frac{2}{5}\right)$$

Logo

$$\langle q_1, q_2 \rangle = \langle (2,1) , \left(-\frac{1}{5} , \frac{2}{5}\right) \rangle =$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{2}{5} = 0$$

$\{q_1, q_2\}$ é ortogonal!

Teorema 29: Todo espaço vetorial de dimensão finita com produto interno possui base ortogonal.

Demonstração: Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base de V. A partir de β, vamos obter uma base ortogonal p/ V através do processo de Gram-Schmidt.

Então seja $\beta^{\perp} = \{q_1, \dots, q_n\}$. Vamos definir q_i, $i = 1, \dots, n$ tais que $\langle q_i, q_j \rangle = 0 \quad \forall\, i \neq j$.

Escolhemos $q_1 = v_1$. Então é claro que $[v_1] = [q_1]$.

Vamos construir q_2, ortogonal a $[q_1]$ e também tal que $[v_1, v_2] = [q_1, q_2]$. Defina

$$q_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, q_1 \rangle}{\langle q_1, q_1 \rangle} \cdot q_1$$

Como $\{v_1, v_2\}$ é l.i, então $q_2 \neq 0_V$.

Repetindo o processo

$$q_n = v_n - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i q_i$$

$$\text{onde } \alpha_i = \frac{\langle q_n, q_i \rangle}{\langle q_i, q_i \rangle}$$

Obtendo assim $\beta^{\perp} = \{q_1, \dots, q_n\}$ uma base ortogonal.

<u>Corolário</u> Todo espaço vetorial de dim. finita com produto interno possui base ortonormal.

<u>Dem</u>: Imediato!

Exemplo:

① $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ c/ produto interno

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx$$

$$\beta = \{1, x, x^2, x^3\} \qquad \beta^{\perp} = ?$$

② $\mathbb{R}^3$ com p.i usual

$$\beta = \{(1,1,1);\ (0,2,1);\ (0,0,1)\} \qquad \beta^{\perp} = ?$$

COMPLEMENTO ORTOGONAL

Definição 32 Seja $(V, \langle \cdot , \cdot \rangle)$ um espaço com p.i. e $S \neq \emptyset$ subconjunto de V. O conjunto

$$S^{\perp} = \{ u \in V : \langle u, v \rangle = 0 \quad \forall v \in V \}$$

é denominado S ortogonal. Quando S for subespaço vetorial de V, $S^{\perp}$ é chamado de complemento ortogonal de S em V.

Teorema 30 $S^\perp$ é subespaço de V, mesmo que S não seja. Se S for subespaço de V, então $S^\perp \cap S = \{0_V\}$.

Demonstração:

Seja $v \in S$. Como $\langle v, 0_V \rangle = 0$, então $0_V \in S^\perp$.

Sejam $w_1, w_2 \in S^\perp$. Então $\langle w_1, v \rangle = 0$ e $\langle w_2, v \rangle = 0$ $\forall\, v \in S$. Logo

$$\langle w_1 + w_2, v \rangle = \langle w_1, v \rangle + \langle w_2, v \rangle = 0 + 0$$

Ou seja $w_1 + w_2 \in S^\perp$. De forma analoga, $\lambda w_1 \in S^\perp$ p/ todo $\lambda \in \mathbb{R}$.

Agora, considere S um subespaço de V. Seja $w \in S \cap S^\perp$. Então $w \in S$ e $w \in S^\perp$. Então p/ qualquer $v \in S$ $\langle w, v \rangle = 0$, em particular p/ $v = w$. Logo $\langle w, w \rangle = 0$. Ou seja $w = 0_V$. Ptto $S \cap S^\perp = \{0_V\}$.

AULA DO DIA 27/01/2016

10

Teorema 31 Sejam V e.v. real dim finita c/ p.i e, U, W subespaços vetoriais de V. Então $(U+W)^{\perp} = U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

Demonstração:

$\subseteq$ Seja $v \in (U+W)^{\perp}$. Então v é ortogonal a todos $z \in U+W$. Como $U \subset U+W$ e $W \subset U+W$, então v é ortogonal a ~~todos~~ todos $u \in U$ e também a todos $u \in W$. Ou seja $v \in U^{\perp}$ e $v \in W^{\perp}$. Ptto $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$.

$\supseteq$ Seja $v \in U^{\perp} \cap W^{\perp}$. Então v é ortogonal a todo elem. de U e também a todo elem. de W. Seja $z \in U+W$. Então, $\exists\, u \in U, w \in W$ tq $z = u + w$.

$$\begin{aligned} \langle v, z \rangle &= \langle v, u+w \rangle \\ &= \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle \\ &= 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

Logo $v \in (U+W)^{\perp}$.

Proposição 4: $V \equiv$ e.v. real c/ p.i, W subespaço de V e $\beta = \{w_1, \dots, w_n\}$ base de W. Então $v \in W^{\perp}$ se, e somente se, $\langle w_i, v \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$.

Dem:

($\Rightarrow$) $v \in W^{\perp} \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0 \quad \forall\, w \in W$. Em particular p/ $\langle v, w_i \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$.

($\Leftarrow$) $w \in W \Rightarrow \exists\, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tq

$$w = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n.$$

P/ todo $v \in V$, temos que:

$$\begin{aligned}
\langle w, v \rangle &= \langle \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n, v \rangle \\
&= \alpha_1 \langle w_1, v \rangle + \dots + \alpha_n \langle w_n, v \rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

Logo $v \in W^{\perp}$

Exemplos

① $\mathbb{R}^4$ c/ p.i. usual

$W = [(1,0,1,1) ; (1,1,0,1)]$

base para $W^\perp$?

$$(x,y,z,t) \in W^\perp \Rightarrow \begin{cases} \langle (x,y,z,t),(1,0,1,1)\rangle = 0 \\ \langle (x,y,z,t),(1,1,0,1)\rangle = 0 \end{cases}$$

$W^\perp = [(-1,1,1,0) ; (-1,0,0,1)]$

② $\mathbb{R}^2$ c/ p.i usual

$U = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : y - 2x = 0 \} = [(1,2)]$

$U^\perp = ?$

③ $\mathbb{R}^3$ $W = [(1,-1,2)]$

$W^\perp = ?$

DECOMPOSIÇÃO ORTOGONAL

Teorema 32: Seja $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e S um subespaço de dimensão finita. Então $V = S \oplus S^{\perp}$.

Demonstração: Para verificar este teorema, basta mostrarmos que cada $v \in V$ possui única decomposição $v = u + w$ com $u \in S$ e $w \in S^{\perp}$. O resultado sairá aplicando a Proposição 1. Seja S subespaço de V e $\beta = \{q_1, \dots, q_n\}$ uma base ortonormal de S. Seja $v \in V$. Definimos os seguintes vetores:

$$u := \sum_{i=1}^{n} \langle v, q_i \rangle q_i$$

$$w := v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, q_i \rangle q_i$$

É claro que $v = u + w$, e que $u \in S$. Verifiquemos que $w \in S^{\perp}$. Pela Proposição 4, basta verificar que $\langle w, q_i \rangle = 0 \quad \forall\, i = 1, \dots, n$.

$$\begin{aligned}
\langle w, q_1 \rangle &= \langle v - \sum_{i=1}^{n} \langle v, q_i \rangle q_i, q_1 \rangle \\
&= \langle v, q_1 \rangle - \langle \sum_{i=1}^{n} \langle v, q_i \rangle q_i, q_1 \rangle \\
&= \langle v, q_1 \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle v, q_i \rangle \langle q_i, q_1 \rangle \\
&= \langle v, q_1 \rangle - \langle v, q_1 \rangle = 0
\end{aligned}$$

Fazendo esse procedimento p/ todo q_i, mostramos que $w \in S^{\perp}$.

Logo fica demonstrado a existência.

Mostraremos a unicidade de u e w. Suponha que $\exists\, u_1, u_2 \in S$ e $w_1, w_2 \in S^{\perp}$ tais que:

$$v = u_1 + w_1$$

e

$$v = u_2 + w_2$$

Então,

$$0_V = (u_1 - u_2) + (w_1 - w_2) \Rightarrow$$

$$S \ni (u_1 - u_2) = -(w_1 - w_2) = w_2 - w_1 \in S^{\perp}$$

Logo $u_1 - u_2 \in S \cap S^{\perp}$ e $w_2 - w_1 \in S \cap S^{\perp}$. Como $S \cap S^{\perp} = \{0_V\}$, então $u_1 = u_2$ e $w_1 = w_2$. E a unicidade está verificada!

<u>Corolário</u>: Seja $(V, \langle , \rangle)$ e.v. de dim. finita e S subespaço de V. Então $\dim V = \dim S + \dim S^{\perp}$

<u>Dem</u>: Exercício!

Teorema 33: Seja V um e.v. de dim. finita munido de um produto interno, e U subespaço vetorial de V. Então $U = (U^\perp)^\perp$.

Demonstração:

Seja $u \in U$. Então p/ qualquer $v \in U^\perp$, $\langle u, v \rangle = 0$. Logo $u \in (U^\perp)^\perp$. Com isso mostramos que $U \subset (U^\perp)^\perp$.

Seja $w \in (U^\perp)^\perp$. Então $\langle w, v \rangle = 0 \;\; \forall v \in U^\perp$. Como $w \in V = U \oplus U^\perp$, então $\exists!\, u \in U$ e $v \in U^\perp$ tais que

$$w = u + v.$$

Logo,

$$\begin{aligned} 0 = \langle w, v \rangle = \langle u + v, v \rangle &= \langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle \\ &= 0 + \langle v, v \rangle \\ &= \langle v, v \rangle \end{aligned}$$

Por isso, $v = 0_V$. Ou seja,

$$w = u + v = u + 0_V = \underline{u \in U}.$$

Exemplos :

1) $\mathbb{R}^4$ com p.i usual

$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 : x - 2y + z + t = 0\}$$

base p/ W ?

base p/ $W^\perp$?

$$\beta_W = \{ \overbrace{(2,1,0,0)}^{v_1} ; \overbrace{(-1,0,1,0)}^{v_2} ; \overbrace{(-1,0,0,1)}^{v_3} \}$$

$(x,y,z,t) \in W^\perp$

$$\langle (x,y,z,t), v_1 \rangle = 0$$
$$\langle (x,y,z,t), v_2 \rangle = 0$$
$$\langle (x,y,z,t), v_3 \rangle = 0$$

$$(x,y,z,t) = t\,(1,-2,1,1)$$

$$W^\perp = [(1,-2,1,1)]$$

2) $P_3(\mathbb{R})$ c/ p.i,

$$\langle p,q \rangle = \int_0^1 p(x)\,q(x)\,dx$$

$W = [1, x]$ $\qquad$ β p/ $W^\perp$?

$$q(x) \in W^\perp \implies \begin{cases} \langle q(x), 1 \rangle = 0 \\ \langle q(x), x \rangle = 0 \end{cases}$$

$$W^\perp = \left[\frac{1}{6} - x - x^2 , \ \frac{1}{5} - \frac{9}{10}x + x^3 \right]$$